Mathe macht stark

5/6

Arbeitsheft

Brüche

Cornelsen

Herausgegeben vom IQSH

Mathe macht stark

5/6

Handreichung

Brüche

Erarbeitet von

Ulrike Stade und Martin Zacharias
(Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen
Schleswig-Holstein – IQSH)

Cornelsen

Mathe macht stark

5/6

Handreichung
Brüche

Erarbeitet von Ulrike Stade und Martin Zacharias (Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein – IQSH).

Diese Handreichung entstand im Rahmen des schleswig-holsteinischen Programms „Niemanden zurücklassen – Mathe macht stark“.
Das schleswig-holsteinische Projekt wurde von folgenden Kooperationspartnern entwickelt:

- Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein
- Ministerium für Allgemeine und Berufliche Bildung, Wissenschaft, Forschung und Kultur des Landes Schleswig-Holstein
- Cornelsen Verlag

Redaktion: Sabrina Bühl, Michael Venhoff
Umschlagsgestaltung und Layoutkonzept: Studio Syberg, Berlin
Layout und technische Umsetzung: Straive
Umschlagsillustration und Bildnachweis: Cornelsen/Inhouse

www.cornelsen.de

1. Auflage, 1. Druck

Alle Drucke dieser Auflage sind inhaltlich unverändert und können im Unterricht nebeneinander verwendet werden.

Druck: XXX

ISBN 978-3-06-000982-4

((PEFC-Logo))

Inhalt

Anhang

1 Worum geht es?

Die individuellen Vorstellungen der Schülerinnen und Schüler orientieren sich meist an im Alltag gebräuchlichen Brüchen wie Zeitangaben ($\frac{1}{2}$ eine halbe Stunde) und Mengenangaben ($\frac{3}{4}$ ein dreiviertel Liter). Im Alltag eher unübliche Brüche sind dagegen kaum mit Vorstellungen verbunden.

Umso bedeutsamer für das Weiterlernen ist der Aufbau von Grundvorstellungen für diese Zahlen in der Sekundarstufe I. Ohne ein grundlegendes und flexibel einsetzbares Verständnis von Brüchen und „Bruchzahlen“ können diese im erweiterten Zahlenraum nicht mit Dezimalbrüchen in Beziehung gesetzt werden. Zudem bilden Brüche die Basis für Prozentangaben, Verhältnisse, relative Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten.

Das Ausbilden von Grundvorstellungen ist ein längerer Prozess. Er basiert auf dem mathematischen Handeln mit geeigneten Materialien und Bildern. Erst die Übersetzungsprozesse enaktiv – ikonisch – symbolisch lassen Brüche und Operationen in der Gedankenwelt der Lernenden entstehen und später in der Vorstellung aktiv werden.

Diese Phase des Aufbaus von Grundvorstellung sollte nicht durch einen zu frühen Übergang zu Algorithmen und deren Regeln überlagert werden. Denn gerade eine an Verstehen orientierte und damit nachhaltige Bruchrechnung gelingt nur dann, wenn die Lernenden bei der Einführung der Rechenverfahren auf ein ganzheitlich angelegtes Bruchverständnis zurückgreifen können und so ihr bereits angelegtes Operationsverständnis (zur Multiplikation und Division) für Brüche weiterentwickeln: Warum ist zum Beispiel das Produkt zweier Brüche kleiner als jeder der Faktoren?

In einem auf das Trainieren und Automatisieren von Rechenverfahren ausgerichteten Unterricht sind Lernende dagegen häufig gezwungen, sich an Regeln und Algorithmen zu erinnern und diese unreflektiert zu reproduzieren. Nicht Verstandenes wird leicht vergessen, verwechselt oder übergeneralisiert (Fehler: $\frac{1}{5} < \frac{1}{8}$, *weil* $5 < 8$).

In Einzelfällen mag dennoch ein kurzzeitiger Lernerfolg zu beobachten sein. Im Allgemeinen ist die mangelnde Ausbildung von Grundvorstellungen und die Entwicklung von Fehlvorstellungen jedoch ein ernsthaftes Problem, das Defizite in der Mathematisierungs- und Modellierungsfähigkeit der Lernenden zur Folge hat.

Die Einführung neuer Begriffe sollte also mit Darstellungen verbunden werden, die die zu lernenden Inhalte mit Leben füllen und in Kontexten angewendet werden können.

3 Kompetenzorientierung

3.1 Lernkarten

Materialhandlungen dienen der Veranschaulichung von Aufgabenstellungen und Lösungswegen.
Die Verbalisierung der Handlungen lässt mentale Bilder entstehen, die es zunehmend ermöglichen, das Material in der Vorstellung zu verwenden. Dieser Ablösungsprozess vom konkreten Handeln zum Handeln in der mentalen Vorstellung ist wesentlich, um das Verständnis für die zugrundeliegenden Begriffe und Operationen zu stützen und zu fördern.
Die Lernkarten „So spreche ich …“ setzen einen Rahmen für die Verbalisierung der Handlungsprozesse und bieten Anknüpfungspunkte für einen kommunikativen Austausch.

Dem gemeinsamen Üben, dem gegenseitigen Beobachten und Beauftragen von Handlungen, kommt im Lernprozess eine große Bedeutung zu.
Aufbauend auf den Einsatz des Materials im **Einstieg**, erfolgt im **Aufstieg** und schließlich im **Gipfel** die fortschreitende Ablösung von der konkreten zur mentalen Handlung und dem damit verbundenen Aufbau innerer Vorstellungsbilder.

1. HANDELN AN GEEIGNETEM MATERIAL (EINSTIEG)	
Lernende legen und bearbeiten Aufgaben mit dem Material. Sie beschreiben die Handlungen anhand der Lernkarten und lösen die Aufgabe.	Die Lehrkraft beobachtet, unterstützt, gibt Formulierungshilfen und achtet darauf, dass die Handlungen „korrekt“ durchgeführt und beschrieben werden.
2. BESCHREIBEN DER HANDLUNG MIT SICHT AUF DAS MATERIAL (Partnerarbeit im EINSTIEG)	
Die erste Person handelt nicht mehr selbst, sondern diktiert einer anderen (anhand der Lernkarten) die Handlung. Die zweite Person führt die Handlungen aus. Die erste Person beobachtet und kontrolliert die Handlungen.	Die Lehrkraft beobachtet, unterstützt und achtet auf Missverständnisse.
3. BESCHREIBEN DER HANDLUNG OHNE SICHT AUF DAS MATERIAL (AUFSTIEG)	
Die Aufgabe und die Handlung werden als (mentale) Bilder beschrieben. Die Lernenden zeichnen das Bild (Handlungsergebnis), das sich aus der mentalen Nutzung des Materials ergibt. Die entstandene Zeichnung wird für die Ergebnisfindung genutzt. Die Lernkarte beschreibt die einzelnen Teilschritte des Lösungsprozesses.	Die Lehrkraft achtet besonders auf den korrekt durchgeführten und dokumentierten Darstellungswechsel von der Handlungsebene (im Einstieg) in die Zeichnungsebene und die für den Übergang in die symbolische Ebene (Gipfel) vorbereitenden Rechenschritte.
4. NUTZEN DES MATERIALS IN DER VORSTELLUNG (GIPFEL)	
Die Aufgaben werden auf symbolischer Ebene bearbeitet. Lernende finden die passenden Teilergebnisse und das Endergebnis. Ggf. wird die entsprechende Handlung in der Vorstellung aktiviert. Die Lernkarte beschreibt die einzelnen Teilschritte des Lösungsprozesses.	Die Lehrkraft beobachtet und unterstützt. Die Lehrkraft entscheidet, ob Unklarheiten und Fehler behoben werden können durch – Zuhilfenahme des Materials, – Hinweise auf die mentale Nutzung des Materials – den Einsatz der aus dem Aufstieg bekannten Dokumentationsmittel.

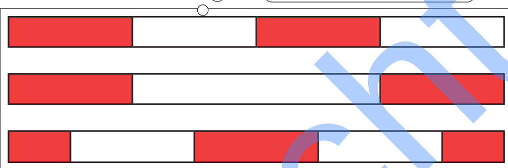
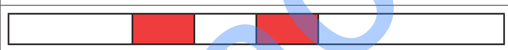
Auch später sollte die Rückführung der Algorithmen auf mentale Materialhandlungen immer wieder eingefordert werden.

3.2 Argumentieren mit Brüchen

Das meist reproduktive und repetitive Bearbeiten von Aufgaben im **Einstieg**, **Aufstieg** und **Gipfel** hat das eigenständige Sammeln von Erfahrungen zum Ziel. Die Argumentationskarten setzen neue Lernimpulse, fordern tiefere Einsichten und bieten Kommunikationsanlässe. Die Aufgabensequenzen führen schrittweise an das mathematische Argumentieren heran. Sie fordern dazu auf, Verstehensprozesse fortzusetzen, Zusammenhänge zu erläutern, Begründungen zu geben und das Gelernte zu reflektieren.
Dabei spielt die Motivation der Lernenden und damit die Lernsituation eine nicht zu vernachlässigende Rolle. Die Karten sind jeweils für die Zusammenarbeit zweier Personen konzipiert. Während die Lernenden zuerst allein an einer der Karten arbeiten (Person A an Karte A und Person B an Karte B), um sich der Phänomene bewusst zu werden, wird danach gezielt auf den kommunikativen Austausch der beiden Lernenden gesetzt. Das Vergleichen der zunächst arbeitsteilig erworbenen Erkenntnisse wirkt einem frühzeitigen Aufgeben beim Auftreten erster Hindernisse entgegen. Danach werden übergreifende, allgemeinere Erkenntnisse gemeinsam ausgehandelt und begründet.

A1 Anteile bestimmen – Bruchstreifen Aufgabe A

Immer gleicher Anteil, Teile verschoben

Aufgaben zum Weiterdenken	**Die Bilder zeigen den Bruch $\frac{1}{2}$.** Ergänze die Bilder so, dass man alle Teile sieht. *Was ist gleich? Was ist anders?*	
Aufgaben zur gemeinsamen Reflexion	Ergänze das Bild so, dass es den Bruch $\frac{1}{2}$ zeigt. Begründe.	 Das Bild zeigt den Bruch $\frac{1}{2}$, weil …
	Entscheide, ob das Bild den Bruch $\frac{1}{2}$ zeigt.	 Das Bild zeigt …

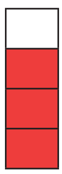
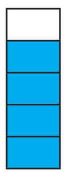
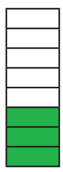
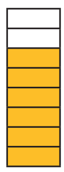
A und B denken allein.

A und B wenden ihre Erkenntnisse an und vergleichen die Ergebnisse.

A und B reflektieren gemeinsam, entscheiden, begründen.

3.3 Üben in Anwendungskontexten

Im Hinblick auf eine fortschreitende Begriffsentwicklung von der Anteilsvorstellung hin zum Operieren auf Zahlenebene ist der Grundvorstellungsaufbau im **Einstieg**, **Aufstieg** und **Gipfel** von konkreten Repräsentationsobjekten losgelöst. Um die gelernten Inhalte dennoch „mit Leben zu füllen" und in Kontexten zu üben, stehen ergänzend Aufgabenkarten als Kopiervorlage zur Verfügung.

1 Anteile bestimmen – Bruchstreifen				
„Warum isst du gern in der Schulmensa?"				
Die Kinder in den 6. Klassen antworten so:	 „Das Essen schmeckt."	 „Ich esse gern mit meinen Freunden."	 „Ich esse gern Salat."	 „Es sollte öfter Pommes geben."
Bestimme die Anteile.				
Stimmen die Aussagen? Begründe.	1 Viertel der Kinder antwortet: „Das Essen schmeckt nicht." Der rote Anteil ist genauso groß wie der gelbe Anteil. Mehr als die Hälfte der Kinder isst gern Salat.			
Formuliere eigene Aussagen.	____ der Kinder antwortet: … Der Anteil ____ ist größer als …			

Anwendungskontext verstehen

Mathematische Inhalte analysieren

Zusammenhänge interpretieren

7 Förderwege und Fördermodule

Auf dem Weg zum Bruch- und Operationsverständnis werden für die Fördereinheiten

1. Anteile verstehen
2. Bruch als Zahl verstehen
3. Brüche addieren
4. Brüche multiplizieren

jeweils zwei Förderwege angeboten:
der gesamte Weg, in dem das in vorgelagerten Fördereinheiten Gelernte wiederholt und in neuen Zugängen vertieft wird,
der schnelle Weg, in dem auf Wiederholungen und Vertiefungen verzichtet wird.

Auch die Standortbestimmung ist nach den oben genannten Fördereinheiten strukturiert. Die vier Abschnitte können so zu unterschiedlichen Zeitpunkten des Unterrichtsgangs eingesetzt werden.
Es wird allerdings empfohlen, den jeweils vorgelagerten Abschnitt (sozusagen als Abschlusstest) in die Diagnostik und ggf. den (schnellen) Förderweg in die Fördermaßnahme einzubeziehen.
Ausgehend von den in den Aufgaben auftretenden Lernschwierigkeiten werden in der Standortbestimmung einzelne Fördermodule empfohlen. Zusammengefasst ergibt sich daraus ein Überblick, der die Wahl des Förderweges nahelegt.
Im gewählten Weg angegebene Fördermodule (EAG) sollten nur in begründeten Fällen übersprungen werden.

7.1 Diagnostik und Fördermaßnahmen

Die Standortbestimmung kann eingesetzt werden als Klassen- bzw. Gruppenaufgabe. Sie eignet sich auch als Gesprächsgrundlage für ein diagnostischen Interview.

Die Lernenden sollten dazu aufgefordert werden, ihre Lösungen bzw. Lösungswege in den Bildern zu dokumentieren.
Wenn die Lösungen korrekt, aber anhand der Bilder nicht nachvollziehbar sind, sollte die Vorgehensweise in einem diagnostischen Gespräch geklärt werden.

7.1.1 Anteile verstehen

Eine sichere Anteilsvorstellung zeigt sich nicht nur darin, dass Anteile in für Schulbuchaufgaben typischen Situationen sicher abgelesen und gebildet werden. Signifikant für das Anteilsverständnis ist das sichere Aufteilen in gleich große Teile und die Kenntnis der Invarianz eines Anteils gegenüber Größenveränderungen des Ganzen und Verfeinerungen bzw. Vergröberungen der Aufteilung.

ANTEILE VERSTEHEN				
	mögliche Lösungen		**Bemerkungen**	**EAG**
1	F1	$\frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \ldots$	Die Darstellung wird als Verhältnis (2 zu 3) und nicht als Anteil (2 von 5) interpretiert.	1
2	F1	nur der 3. Teil markiert	Die Position des Bruchs am Zahlenstrahl überlagert die Anteilsvorstellung.	1
	F2	Aufteilung falsch	Das Verfeinern aller Teile (mindestens eines Teils) wird nicht beachtet.	
3	F3	$\frac{1}{4}, \frac{4}{\square}, \frac{3}{\square}, \ldots$	Flächen-Anteile werden nicht korrekt erkannt.	2
	F4	$\frac{1}{5}$	Die Flächen-Aufteilung wird nicht beachtet.	
4	F3	$\frac{1}{2}, \ldots$	Flächen-Anteile werden nicht korrekt erkannt.	2
	F4	$\frac{1}{3}$	Die Flächen-Aufteilung wird nicht beachtet.	
5	F3	$\frac{4}{6}, \ldots$	Flächen-Anteile werden nicht korrekt erkannt.	2
6	F5	$\frac{4}{10}, \frac{2}{5}$	Die Verdoppelung der Fläche wird nicht beachtet.	3
7	F1	falsche Markierung	Anteile werden nicht korrekt erkannt.	3
	F5	immer 1 Teil markiert	Die Verdoppelung der Länge/Fläche wird nicht beachtet.	

7.2 Überblick Förderwege

Anteile verstehen

Der gesamte Weg

- Anteile bestimmen (Bruchstreifen) **1**
- Anteile bestimmen (Geobrett) **2**
- Anteile bestimmen (Geobrett – verschiedene Rahmen) **3**

Der schnelle Weg

- Anteile bestimmen (Bruchstreifen) **1**
- Anteile bestimmen (Geobrett – verschiedene Rahmen) **3**

Brüche addieren

Der gesamte Weg

- Anteile bestimmen (Rechteck) **6**
- Anteile verfeinern (Rechteck) **7**
- Brüche addieren (Rechteck) **8**

Der schnelle Weg

- Anteile verfeinern (Rechteck) **7**
- Brüche addieren (Rechteck) **8**

Bruch als Zahl verstehen

Der gesamte Weg

- Anteile bestimmen (Bruchstreifen) **1**
- Brüche vergleichen (Bruchstreifen) **4**
- Brüche verfeinern (Bruchstreifen) **5**

Der schnelle Weg

- Brüche vergleichen (Bruchstreifen **4**

Brüche multiplizieren

Der gesamte Weg

- Anteile verfeinern (Rechteck) **7**
- Anteile bestimmen (Steckwürfel) **9**
- Anteile ergänzen (Steckwürfel) **10**
- Brüche multiplizieren (Rechteck) **11**

Der schnelle Weg

- Anteile bestimmen (Steckwürfel) **9**
- Brüche multiplizieren (Rechteck) **11**

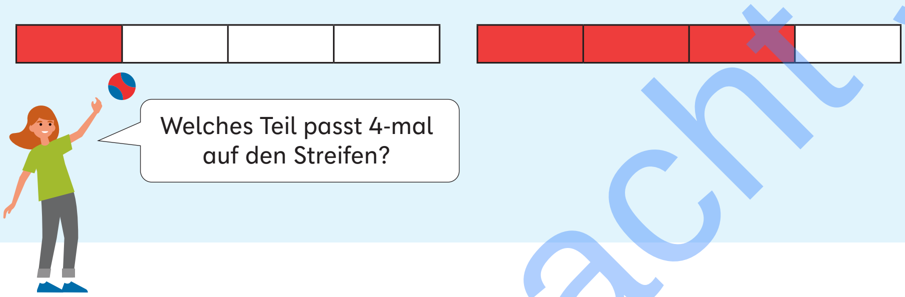
1 Anteile bestimmen – Bruchstreifen

Vorwissen
– die Messgröße „Länge“ verstehen
Durch den Einsatz des Materials wird vertieft und geübt:
– Brüche als Anteile (eines Ganzen) verstehen.

1E Anteile legen – Bruchstreifen

Aufgabe: 3 Viertel legen

1 Viertel legen | **3-mal 1 Viertel legen** | **Ergebnis ablesen**



Der gelegte **Anteil** ist **3 Viertel**.

Welches Teil passt 4-mal auf den Streifen?	Ich suche 4 gleich lange Teile. Ich prüfe, ob die 4 Teile nebeneinander genau auf den Streifen passen. 1 Teil ist 1 Viertel.	Durch Probieren die Anteilbildung als Aufteilen des Streifens in vier **gleich lange Teile** (: 4) begreifen.
1 Viertel legen	Ich lege 1 Teil auf den Streifen.	Stammbruch als Ergebnis des Aufteilens wahrnehmen.
3-mal 1 Viertel legen	Ich lege 3 Teile auf den Streifen.	Der geforderte Anteil entsteht durch Vervielfachen (· 3) des Stammbruchs.
Ergebnis ablesen	Der Streifen ist in 4 Viertel aufgeteilt. Auf dem Streifen liegen 3 Viertel.	Das (statische) Handlungsbild beschreiben: Den Begriff „Anteil“ als „Anzahl markierter Teile (3) in dem in Viertel aufgeteilten Streifen“ verstehen.

1A Anteile zeichnen – Bruchstreifen

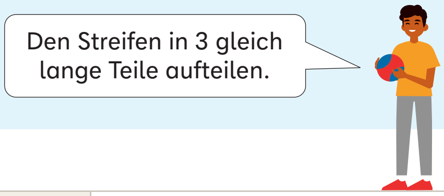
Aufgabe: 2 Drittel zeichnen

1 Drittel markieren

2-mal 1 Drittel markieren

Ergebnis ablesen

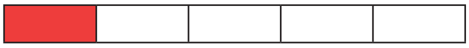
Der markierte **Anteil ist 2 Drittel.**

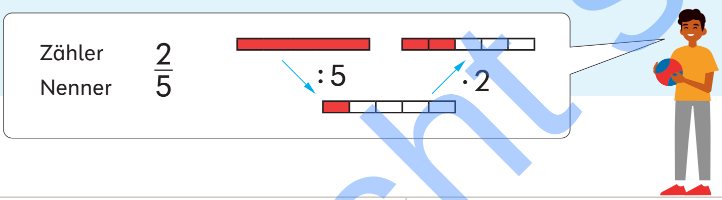


Den Streifen in 3 gleich lange Teile aufteilen	**1. Lösungsweg:** Ich suche 3 gleich lange Teile. Ich prüfe, ob die 3 Teile nebeneinander genau auf den Streifen passen. Ich zeichne die Trennlinien in den Streifen. **2. Lösungsweg:** Ich messe die Länge des Streifens: 18 cm. Ich rechne 18 : 3 = 6. Ich zeichne eine Trennlinie bei 6 cm und eine Trennlinie bei 12 cm in den Streifen. 1 Teil ist 1 Drittel.	Durch Messen oder Auflegen die Anteilbildung als Aufteilen des Streifens in drei **gleich lange Teile** (: 3) darstellen.
1 Drittel markieren	Ich markiere 1 Teil.	Stammbruch als Ergebnis des Aufteilens wahrnehmen.
2-mal 1 Drittel markieren	Ich markiere 2 Teile.	Der geforderte Anteil entsteht durch Vervielfachen (· 2) des Stammbruchs.
Ergebnis ablesen	Der Streifen ist in 3 Drittel aufgeteilt. 2 Drittel sind markiert.	Das (statische) Handlungsbild beschreiben: Den Begriff „Anteil“ als „Anzahl markierter Teile (2) in dem in Drittel aufgeteilten Streifen“ verstehen.

1G Anteile als Bruch angeben – Bruchstreifen

Aufgabe: Bruch angeben

	Teile zählen	markierte Teile zählen	Ergebnis ablesen
	5	1	$\frac{1}{5}$
	5	2	$\frac{2}{5}$
	5	3	$\frac{3}{5}$
	5	4	$\frac{4}{5}$
	5	5	$\frac{5}{5}$



Teile zählen	Ich zähle die Teile: 5. Die Teile sind gleich lang.	Bruchdarstellung aus (statischem) Handlungsbild ableiten, dabei die Regeln des Aufteilens in gleich lange Teile beachten.
	Der Streifen ist in 5 Fünftel aufgeteilt. Ich schreibe 5 in den Nenner des Bruches.	
markierte Teile zählen	2 Teile sind markiert, das sind 2 Fünftel. Ich schreibe 2 in den Zähler des Bruches.	
Ergebnis ablesen	Der markierte Bruch ist $\frac{2}{5}$.	Den Begriff „Bruch“ als Äquivalent für „Anteil“ einführen.
Nenner	... in so viele gleich lange Teile ist der Streifen aufgeteilt.	Darstellung des in E und A durchgeführten Herstellungsprozesses des Aufteilens und Vervielfachens.
Zähler	... so viele Teile sind markiert.	

Anhang

Verzeichnis

Die einführenden Aufgabenstellungen sind dem Anforderungsbereich I zuzuordnen. Lernende geben vertraute Argumentationen (zur Aufteilung, zu Begriffen wie „Zähler“ und „Nenner“ …) wieder und untersuchen Gemeinsamkeiten und Unterschiede.
Weitere Kompetenzzuordnungen sind der folgenden Übersicht zu entnehmen.

	Nr.	Tätigkeit
AB II	1	überschaubare Lösungswege erläutern, prüfen bzw. widerlegen
	2	Darstellungen fortsetzen
AB III	3	sich zwischen (komplexen) Argumentationen entscheiden

EAG	Nr.	Anteile (eines Ganzen)	Verfeinerungen	die Größe der Teile	Anteile einer Menge	Titel	Anforderungen
1	A1	x				Immer gleicher Anteil, Teile verschoben	1
1	A2	x				Immer gleich viele Teile markiert, aber doppelt so viele Teile	2
1	A3		x			Immer gleicher Anteil, aber doppelt so viele Teile	2
2	A4	x				Immer halbe Rechtecke, aber kleinere Teile	1
2	A5	x				Anteile ergänzen	1
3	A6			x		Immer ein Teil markiert, aber immer kleinerer Rahmen	2
3	A7			x		Gleicher Anteil, aber immer kleinerer Rahmen	2
4	A8	x				Strategie: „Teile vergleichen“	1
4	A9	x				Strategie: „Mit $\frac{1}{2}$ vergleichen“	1
4	A10		x			Gleicher Anteil, aber immer doppelt so viele Teile	1
4	A11	x				Welche Strategie wählst du?	3
5	A12		x			Gleicher Anteil, aber immer doppelt so viele Teile	1
6	A13	x				Gleicher Anteil, Teile verschoben	1
6	A14	x				Teile verschieden groß	1
6	A15	x				Teile verschieden groß	1
7	A16			x		Immer gleich viele Teile markiert, aber mehr Teile	1
7	A17			x		Immer gleich viele Teile markiert, aber Teile größer	1
7	A18		x			Gleicher Anteil, aber immer doppelt so viele Teile	1

Erarbeitet von: Ulrike Stade, IQSH

Verzeichnis

EAG	Nr.	Titel	Beschreibung
1	1	„Warum isst du gern in der Schulmensa?“	Anteile bestimmen (Säulendiagramm)
1	2	Dateien kopieren	Anteile bestimmen (Downloadbalken)
3	3	Tangram-Figuren	Anteile bestimmen (Tangram)
4	4	Was ist deine Lieblingssportart?	Anteile vergleichen (Streifendiagramm)
4	5	Zeitungsmeldung „Impfen“	Anteile vergleichen (Aussage)
8	6	Was ist deine Lieblingssportart?	Brüche addieren (Flächendiagramm)
9	7	Wie bist du heute in die Schule gekommen?	Anteile bestimmen (Säulendiagramm)
9	8	Wie bist du heute in die Schule gekommen?	Anteile von Mengen darstellen (Säulendiagramm)
10	9	Isst du gern in der Schulmensa?	Anteile von unterschiedlich großen Mengen darstellen (Säulendiagramm)
11	10	Wie viele Kinder spielen Fußball?	Anteile (von Anteilen) bestimmen (Flächendiagramm)
11	11	Wie viele Kinder lesen gern?	Anteile (von Anteilen) darstellen (Flächendiagramm)
11	12	Welche Eissorte isst du am liebsten?	Anteile (von Anteilen) bestimmen (Flächendiagramm)

Erarbeitet von: Ulrike Stade, IQSH